**Сюжетные задачи**

**C 0 № 505591.** В трёх вер­ши­нах квад­ра­та на­хо­дят­ся три куз­не­чи­ка. Они иг­ра­ют в че­хар­ду, т. е. пры­га­ют друг через друга. При этом, если куз­не­чик A пры­га­ет через куз­не­чи­ка B, то после прыж­ка он ока­зы­ва­ет­ся от B на том же рас­сто­я­нии, что и до прыж­ка, и, есте­ствен­но, на той же пря­мой. Может ли один из них по­пасть в четвёртую вер­ши­ну квад­ра­та?

**Ре­ше­ние.**

Вве­дем си­сте­му ко­ор­ди­нат, в ко­то­рой три вер­ши­ны квад­ра­та имеют ко­ор­ди­на­ты (0, 0), (1, 0), (0, 1). Тогда, оче­вид­но, чет­вер­тая вер­ши­на имеет ко­ор­ди­на­ты (1, 1).

Пусть куз­не­чик на­хо­дит­ся в точке (a, b) и пры­га­ет через куз­не­чи­ка, на­хо­дя­ще­го­ся в (c, d).

Тогда его ко­ор­ди­на­ты ста­нут равны (2*c* − *a*, 2*b* − *d*). Таким об­ра­зом, пер­вая ко­ор­ди­на­та из­ме­ня­ет­ся на чет­ное число 2(*с* − *a*), а вто­рая ко­ор­ди­на­та из­ме­ня­ет­ся на чет­ное число 2(*b* − *d*).

Зна­чит чет­но­сти ко­ор­ди­нат куз­не­чи­ков не ме­ня­ют­ся. По­это­му чтобы по­пасть в точку (1; 1), не­об­хо­ди­мо на­хо­дить­ся в точке, обе ко­ор­ди­на­ты ко­то­рой не­чет­ны. Таким точек, среди пер­вых трех вер­шин квад­ра­та нет. По­это­му по­пасть в чет­вер­тую вер­ши­ну квад­ра­та никто из куз­не­чи­ков не может.

**C 0 № 505597.** Два иг­ро­ка ходят по оче­ре­ди. Перед на­ча­лом игры у них есть по­ров­ну го­ро­шин. Ход со­сто­ит в пе­ре­да­че со­пер­ни­ку лю­бо­го числа го­ро­шин. Не раз­ре­ша­ет­ся пе­ре­да­вать такое ко­ли­че­ство го­ро­шин, ко­то­рое до этого уже кто‐то в этой пар­тии пе­ре­да­вал. Ноль го­ро­шин тоже пе­ре­да­вать нель­зя. Тот, кто не может сде­лать оче­ред­ной ход по пра­ви­лам, — счи­та­ет­ся про­иг­рав­шим. Кто — на­чи­на­ю­щий или его со­пер­ник — по­бе­дит в этой игре, как бы ни играл его партнёр?

Рас­смот­ри­те слу­чаи:

а) У каж­до­го по две го­ро­ши­ны;

б) У каж­до­го по три го­ро­ши­ны;

в) Общий слу­чай: у каж­до­го по *N* го­ро­шин.

**Ре­ше­ние.**

а) Пер­вый игрок либо от­даст вто­ро­му две го­ро­ши­ны (на это вто­рой даст ему одну, и у пер­во­го не будет ходов), либо от­даст одну. В этом слу­чае вто­рой игрок может от­дать ему две го­ро­ши­ны, назад по­лу­чит три, от­даст че­ты­ре и по­бе­дит.

б) Если пер­вый игрок от­даст три или две, назад по­лу­чит одну и сразу про­иг­ра­ет. Если же от­даст одну, то назад по­лу­чит две. Далее у пер­во­го два ва­ри­ан­та хода, но оба плохи: отдав 4, он по­лу­чит назад 3 и про­иг­ра­ет, а отдав 3, по­лу­чит 4, будет вы­нуж­ден от­дать 5, по­лу­чит 6 и всё равно про­иг­ра­ет.

в) По­бе­дит вто­рой игрок, при­дер­жи­ва­ясь пра­ви­ла: «вся­кий раз от­да­вай ми­ни­маль­но воз­мож­ное число го­ро­шин». До­ка­жем, что это дей­стви­тель­но вы­иг­рыш­ная стра­те­гия. До­ста­точ­но по­ка­зать, что у вто­ро­го иг­ро­ка все­гда будет ход. На­чи­на­ет игру у нас пер­вый игрок, но мы схит­рим и сде­ла­ем так, чтобы игру на­чи­нал вто­рой: пред­по­ло­жим, что вто­рой (услов­но) пе­ре­даёт сна­ча­ла пер­во­му 0 го­ро­шин. Те­перь можно ви­деть, что вся­кий раз в ответ на ход вто­ро­го пер­вый игрок вы­нуж­ден будет от­дать ему боль­ше, чем сам по­лу­чил. По­это­му ко­ли­че­ство го­ро­шин у вто­ро­го с каж­дым пар­ным ходом будет уве­ли­чи­вать­ся хотя бы на одну. Перед *K*-ом ходом у него будет не менее *N* + *K* го­ро­шин. А от­дать на *K*-ом ходу он в со­от­вет­ствии со своей стра­те­ги­ей дол­жен не более 2*K* го­ро­шин. Это осу­ще­стви­мо, по­сколь­ку при*N* + *K* ≤ 2*K*. А более, чем *N* ходов, игра длить­ся не может.

Ответ: а) По­беж­да­ет вто­рой игрок; б) По­беж­да­ет вто­рой игрок. в) По­беж­да­ет вто­рой игрок

**C 0 № 505621.** Леша за­ду­мал дву­знач­ное число (от 10 до 99). Гриша пы­та­ет­ся его от­га­дать, на­зы­вая дву­знач­ные числа. Если Гриша пра­виль­но на­зы­ва­ет число, или же одну цифру на­зы­ва­ет пра­виль­но, а в дру­гой оши­ба­ет­ся не более чем на еди­ни­цу, то Леша от­ве­ча­ет «тепло»; в осталь­ных слу­ча­ях Леша от­ве­ча­ет «хо­лод­но». (На­при­мер, если за­ду­ма­но число 65, то на­звав 65, 64, 66, 55 или 75, Гриша услы­шит в ответ «тепло», а в осталь­ных слу­ча­ях услы­шит «хо­лод­но».)

а) По­ка­жи­те, что нет спо­со­ба, при ко­то­ром Гриша га­ран­ти­ро­ван­но узна­ет число, ис­тра­тив 18 по­пы­ток.

б) При­ду­май­те спо­соб, при ко­то­ром Гриша га­ран­ти­ро­ван­но узна­ет число, ис­тра­тив 24 по­пыт­ки (какое бы число ни за­ду­мал Леша).

в) А за 22 по­пыт­ки по­лу­чит­ся?

**Ре­ше­ние.**

а) Рас­по­ло­жим дву­знач­ные числа в клет­ках пря­мо­уголь­ни­ка вы­со­ты 9 и ши­ри­ны 10 (по го­ри­зон­та­ли от­кла­ды­ва­ем еди­ни­цы, по вер­ти­ка­ли – де­сят­ки). Каж­дой по­пыт­ке Гриши со­от­вет­ству­ет кре­стик из пяти кле­ток: в цен­тре на­зван­ное им число, а по бокам че­ты­ре числа, от­ли­ча­ю­щи­е­ся в одной цифре на еди­ни­цу (если на­зван­ное число со­дер­жит цифру 0 или 9, не­ко­то­рые клет­ки кре­сти­ка вы­хо­дят за края пря­мо­уголь­ни­ка; таким клет­кам ни­ка­кие числа не со­от­вет­ству­ют). За­да­ча Гриши – по­крыть пря­мо­уголь­ник 9 × 10 та­ки­ми кре­сти­ка­ми. Убе­дим­ся, что 18 кре­сти­ков ему не хва­тит. Сум­мар­ная пло­щадь кре­сти­ков равна 18 × 5 = 90, т. е. равна пло­ща­ди пря­мо­уголь­ни­ка. Но, по­кры­вая уг­ло­вую клет­ку, мы не­из­беж­но вый­дем за пре­де­лы пря­мо­уголь­ни­ка, и эта по­те­ря по­ме­ша­ет по­крыть весь пря­мо­уголь­ник.

б,в) Решим сразу пункт в). Убе­дим­ся, что 22 кре­сти­ков ему хва­тит. По­кры­тие из 22 кре­сти­ков легко найти, если за­ме­тить, что кре­сти­ка­ми можно вы­ло­жить плос­кость без пе­ре­кры­тий (прав­да, придётся ещё до­ба­вить не­сколь­ко кре­сти­ков по краям пря­мо­уголь­ни­ка). На­при­мер, Гриша может на­звать числа 11, 13, 17, 25, 29, 30, 32, 37, 44, 49, 51, 56, 63, 68, 70, 75, 82, 87, 89, 90, 94, 97.

**C 0 № 505645.** В бо­та­ни­че­ском спра­воч­ни­ке каж­дое рас­те­ние ха­рак­те­ри­зу­ет­ся 100 при­зна­ка­ми (каж­дый при­знак либо при­сут­ству­ет, либо от­сут­ству­ет). Рас­те­ния счи­та­ют­ся "не­по­хо­жи­ми", если они раз­ли­ча­ют­ся не менее, чем по 51 при­зна­ку.

а) По­ка­жи­те, что в спра­воч­ни­ке не может на­хо­дить­ся боль­ше 50 по­пар­но не­по­хо­жих рас­те­ний.

б) А может ли быть 50?

**Ре­ше­ние.**

а) Пусть не­по­хо­жих рас­те­ний 51 и http://reshuege.ru/formula/8c/8ce4b16b22b58894aa86c421e8759df3.png из них имеют дан­ный при­знак, а http://reshuege.ru/formula/66/6675425d4e4590ab98561f43ab11f91b.png — не имеют. Число не­сов­па­да­ю­щих по этому при­зна­ку пар равно http://reshuege.ru/formula/f4/f44f857d421606454ca6ead73a7060fc.png В сумме по­лу­ча­ем менее http://reshuege.ru/formula/3b/3b3249cb8ee8edec59918c8ecc829700.png не­сов­па­де­ний. Но по усло­вию их долж­но быть боль­ше, чем http://reshuege.ru/formula/e9/e9e2ac610d34672f6a720df610bd2226.png Про­ти­во­ре­чие.

б) Пусть в спра­воч­ни­ке есть http://reshuege.ru/formula/6f/6f8f57715090da2632453988d9a1501b.png видов по­пар­но не­по­хо­жих рас­те­ний. До­ба­вим к опи­са­нию еще один при­знак: чётность числа име­ю­щих­ся у дан­но­го рас­те­ния при­зна­ков. По­лу­чим спра­воч­ник, где для опи­са­ния рас­те­ния ис­поль­зу­ет­ся уже 101 при­знак, при­чем любые опи­са­ния раз­ли­ча­ют­ся по край­ней мере по 52 при­зна­кам (если ис­ход­ные опи­са­ния раз­ли­ча­лись ровно по 51 при­зна­ку, то чётно­сти числа име­ю­щих­ся при­зна­ков у них раз­лич­ны). Дей­ствуя так же, как в пунк­те а), по­лу­ча­ем, что общее число раз­ли­чий не мень­ше http://reshuege.ru/formula/f6/f61093e7284f905e8ba3a21b2b85d2a1.png но не боль­ше http://reshuege.ru/formula/51/51865f033f6329aec379aa91c7f66a9f.png Из не­ра­вен­ства http://reshuege.ru/formula/67/67c09e1eb5d3b83aa17178ce5a7c434a.png сле­ду­ет, что http://reshuege.ru/formula/cd/cd28c49df20d6dc62ee86fd3ac28d77f.png Итак, в новом, а зна­чит, и в ис­ход­ном спра­воч­ни­ке опи­са­но не более 34 по­пар­но не­по­хо­жих рас­те­ний.

**C 0 № 505603.** Трое дру­зей иг­ра­ли в шашки. Один из них сыг­рал 25 игр, а дру­гой — 17 игр. Мог ли тре­тий участ­ник сыг­рать

а) 34;

б) 35;

в) 56 игр?

**Ре­ше­ние.**

а) Да, мог. На­при­мер, если пер­вый с тре­тьим сыг­ра­ли 21 игру, вто­рой с тре­тьим - 13 игр, а пер­вый со вто­рым - 4 игры.

б) Нет, не мог. Дей­стви­тель­но, в таком слу­чае общее число сыг­ран­ных пар­тий было бы равно (25 + 17 + 35)/2 = 38,5 игр — не целое число.

в) Нет, не мог. Пусть такое воз­мож­но, тогда тре­тий игрок сыг­рал боль­ше пар­тий, чем пер­вый и вто­рой вме­сте взя­тые (25 + 17 < 56). Но дру­гих со­пер­ни­ков у тре­тье­го не могло быть, по­это­му по­лу­ча­ем про­ти­во­ре­чие.

**C 0 № 505657.** http://reshuege.ru/formula/7b/7b8b965ad4bca0e41ab51de7b31363a1.png школь­ни­ков хотят раз­де­лить по­ров­ну http://reshuege.ru/formula/6f/6f8f57715090da2632453988d9a1501b.png оди­на­ко­вых шо­ко­ла­док, при этом

каж­дую шо­ко­лад­ку можно раз­ло­мить не более од­но­го раза.

а) При каких http://reshuege.ru/formula/7b/7b8b965ad4bca0e41ab51de7b31363a1.png это воз­мож­но, если http://reshuege.ru/formula/a0/a0c7d363e6a54886a0dfc8803ed9660c.png

б) При каких http://reshuege.ru/formula/7b/7b8b965ad4bca0e41ab51de7b31363a1.png и http://reshuege.ru/formula/6f/6f8f57715090da2632453988d9a1501b.png это воз­мож­но?

**Ре­ше­ние.**

Решим сразу пункт б).

Рас­по­ло­жим http://reshuege.ru/formula/6f/6f8f57715090da2632453988d9a1501b.png шо­ко­ла­док одну за дру­гой в одну линию и раз­ре­жем по­лу­чив­шу­ю­ся шо­ко­лад­ную по­ло­су рав­но­мер­но на http://reshuege.ru/formula/7b/7b8b965ad4bca0e41ab51de7b31363a1.png рав­ных ча­стей. Будем счи­тать, что длина шо­ко­лад­ки равна http://reshuege.ru/formula/36/36cb6ed5283e452800c275dd6934aecc.png Каж­дый школь­ник дол­жен по­лу­чить пор­цию длины http://reshuege.ru/formula/19/1956940fd568edcef6c60b3723bb951b.png Если http://reshuege.ru/formula/5c/5cb2164fa1efe5b98a645ca6beeb8fd8.png то длина пор­ции будет не мень­ше http://reshuege.ru/formula/36/36cb6ed5283e452800c275dd6934aecc.png Сле­до­ва­тель­но, по каж­дой шо­ко­лад­ке пройдёт не более од­но­го раз­ре­за.

Пусть http://reshuege.ru/formula/e6/e6dab4828e9bf27f0646bd79ce36038b.png где http://reshuege.ru/formula/82/8277e0910d750195b448797616e091ad.png — де­ли­тель http://reshuege.ru/formula/19/1956940fd568edcef6c60b3723bb951b.png В этом слу­чае длина пор­ции равна http://reshuege.ru/formula/ac/ac58f3fd14c75fd460537f6743ed7ff0.png При опи­сан­ном спо­со­бе раз­де­ла каж­дая шо­ко­лад­ка де­лит­ся на части длины, крат­ной http://reshuege.ru/formula/9d/9d308255a9b1b69e380e9e84033445b3.png зна­чит, рас­сто­я­ние от линии раз­ре­за до края шо­ко­лад­ки не мень­ше http://reshuege.ru/formula/f4/f4900da2ac34ac330fc14bb39d9fceb9.png Два раз­ре­за, про­хо­дя­щие по одной шо­ко­лад­ке, вы­ре­за­ли бы из неё часть, не боль­шую http://reshuege.ru/formula/d4/d4cbbe8292de034bc449caec8a30eee8.png что мень­ше пор­ции. Зна­чит, каж­дая шо­ко­лад­ка ока­жет­ся раз­ре­зан­ной не более од­но­го раза.

До­ка­жем, что дру­гих пар http://reshuege.ru/formula/19/19c3b5474ede17769e78065f97a3d9bf.png нет. Пусть http://reshuege.ru/formula/71/71bf6edf866f568a66bf0debe6878c99.png и уда­лось раз­де­лить шо­ко­лад­ки с со­блю­де­ни­ем усло­вий. До­ка­жем, что длины всех ку­соч­ков, а сле­до­ва­тель­но, и http://reshuege.ru/formula/6f/6f8f57715090da2632453988d9a1501b.png крат­ны http://reshuege.ru/formula/f4/f4900da2ac34ac330fc14bb39d9fceb9.png Пусть это не так. Рас­смот­рим кусок наи­мень­шей длины http://reshuege.ru/formula/4d/4d9faf11557a578012713c3850be3ffa.png не крат­ной http://reshuege.ru/formula/f4/f4900da2ac34ac330fc14bb39d9fceb9.png Тогда есть кусок длины http://reshuege.ru/formula/9b/9bc1a0d92794ce4a7a34b6f7fce9b1da.png Тот, кто его по­лу­чил, также по­лу­чил кусок длины, не боль­шей http://reshuege.ru/formula/d4/d44ae24fb134feb3f8ce430e1027047b.png не крат­ный http://reshuege.ru/formula/f4/f4900da2ac34ac330fc14bb39d9fceb9.png Про­ти­во­ре­чие. Зна­чит, http://reshuege.ru/formula/6f/6f8f57715090da2632453988d9a1501b.png крат­но http://reshuege.ru/formula/f4/f4900da2ac34ac330fc14bb39d9fceb9.png Те­перь ясно, какой ответ в пунк­тах а) и б).

а) при *n* = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 18.

б) при http://reshuege.ru/formula/d2/d260664d27955ef2daebf3292cb5f1a4.png или при http://reshuege.ru/formula/16/1686843f393600094edffba397b3c7c2.png

**C 0 № 505699.** Даны *N* синих и *N* крас­ных па­ло­чек, при­чем сумма длин синих па­ло­чек равна сумме длин крас­ных. Из­вест­но, что из синих па­ло­чек можно сло­жить *N*‐уголь­ник, и из крас­ных — тоже. Все­гда ли можно вы­брать одну синюю и одну крас­ную па­лоч­ки и пе­ре­кра­сить их (синюю — в крас­ный цвет, а крас­ную — в синий) так, что снова из синих па­ло­чек можно будет сло­жить *N*‐уголь­ник, и из крас­ных — тоже?

Ре­ши­те за­да­чу

а) для *N* = 3;

б) для про­из­воль­но­го на­ту­раль­но­го *N* > 3.

**Ре­ше­ние.**

а) Пусть длины синих па­ло­чек 12, 17, 20, а крас­ных — 2, 23, 24. По­сколь­ку един­ствен­ная пара с раз­но­стью, мень­шей 2, — это (23, 24), а после пе­ре­кра­ши­ва­ния па­лоч­ка 2 по­па­дет в дру­гую по со­ста­ву трой­ку, то в ней раз­ность наи­боль­ших сто­рон будет боль­ше 2, и тре­уголь­ник сло­жить будет нель­зя.

б) Пусть *k* = *N* − 2. Со­ста­вим набор из двух синих па­ло­чек длины 12*k* + 5 и 24*k* − 4 и *k* па­ло­чек длины 12; двух «длин­ных» крас­ных па­ло­чек длины 24*k* – 1 и 24*k* и *k* па­ло­чек длины 2/*k*. Если пе­ре­кра­ше­на одна из двух «длин­ных» крас­ных па­ло­чек, то раз­ность между длин­ны­ми крас­ны­ми па­лоч­ка­ми после пе­ре­кра­ши­ва­ния боль­ше 2, и па­лоч­ка­ми длины 2/*k* её не по­крыть. Пусть синей стала па­лоч­ка длины 2/*k*. Если па­лоч­ка длины 24*k* − 4 оста­лась синей, то сумма осталь­ных синих не пре­вос­хо­дит 2/*k* + 12(*k* − 1)−+ 12*k* + 5 < 24*k* − 4. Если па­лоч­ка длины 24*k* − 4 стала крас­ной, то наи­боль­шей синей стала па­лоч­ка длины 12*k* + 5, но сумма осталь­ных синих 12*k* +2/*k* < 12*k* + 5. В обоих слу­ча­ях синий мно­го­уголь­ник не скла­ды­ва­ет­ся.

Ответ: а) не все­гда б) не все­гда.

**C 0 № 505729.** а) Ску­пой ры­царь хра­нит зо­ло­тые мо­не­ты в шести сун­ду­ках. Од­на­ж­ды, пе­ре­счи­ты­вая их, он за­ме­тил, что если от­крыть любые два сун­ду­ка, то можно раз­ло­жить ле­жа­щие в них мо­не­ты по­ров­ну в эти два сун­ду­ка. Еще он за­ме­тил, что если от­крыть любые 3, 4 или 5 сун­ду­ков, то тоже можно пе­ре­ло­жить ле­жа­щие в них мо­не­ты таким об­ра­зом, что во всех от­кры­тых сун­ду­ках ста­нет по­ров­ну монет. Тут ему по­чу­дил­ся стук в дверь, и ста­рый скря­га так и не узнал, можно ли раз­ло­жить все мо­не­ты по­ров­ну по всем шести сун­ду­кам. Можно ли, не за­гля­ды­вая в за­вет­ные сун­ду­ки, дать точ­ный ответ на этот во­прос?

б) А если сун­ду­ков было во­семь, а cку­пой ры­царь мог раз­ло­жить по­ров­ну мо­не­ты, ле­жа­щие в любых 2, 3, 4, 5, 6 или 7 сун­ду­ках?

**Ре­ше­ние.**

а) Для на­ча­ла за­ме­тим, что число монет во всех сун­ду­ках имеет оди­на­ко­вую чётность. Ведь по­де­лить по­ров­ну со­дер­жи­мое двух сун­ду­ков с раз­ной чётно­стью монет нель­зя.

Затем об­ра­тим вни­ма­ние на то, что общее ко­ли­че­ство монет в пер­вых трёх сун­ду­ках крат­но трём. Если за­ме­нить сун­дук 3 на сун­дук 4, то де­ли­мость на 3 не на­ру­шит­ся. Это озна­ча­ет, что число монет в четвёртом сун­ду­ке даёт тот же оста­ток при де­ле­нии на 3, что и в тре­тьем. Таким же об­ра­зом про любые два сун­ду­ка можно до­ка­зать, что число монет в одном даёт тот же оста­ток при де­ле­нии на 3, что и в дру­гом. По­это­му остат­ки от де­ле­ния всех этих чисел на 3 оди­на­ко­вы.

Если числа дают оди­на­ко­вые остат­ки при де­ле­нии как на 2, так и на 3, то их раз­ность де­лит­ся на 2 и на 3, то есть де­лит­ся и на 6. Это озна­ча­ет, что у любых двух (а зна­чит, и у всех шести) чисел остат­ки при де­ле­нии на 6 равны между собой. Сумма шести таких чисел будет крат­на 6. По­это­му все мо­не­ты можно раз­ло­жить по­ров­ну по всем сун­ду­кам.

б) Рас­суж­дая так же, как в пунк­те а), можно до­ка­зать, что все во­семь чисел, со­от­вет­ству­ю­щие ко­ли­че­ствам монет в сун­ду­ках, дают оди­на­ко­вые остат­ки при де­ле­нии на 2, 3, 4, 5, 6 и 7. Зна­чит, эти числа дают оди­на­ко­вые остат­ки при де­ле­нии на 420 (420 — это наи­мень­шее общее крат­ное чисел 2, 3, 4, 5, 6 и 7). Но по­сколь­ку 420 не крат­но 8, эти числа могут иметь раз­лич­ные остат­ки при де­ле­нии на 8, что по­ме­ша­ет по­ров­ну раз­ло­жить мо­не­ты по вось­ми сун­ду­кам.

На­при­мер, в пер­вом сун­ду­ке могла быть 421 мо­не­та, а в осталь­ных семи - по одной. Тогда в двух сун­ду­ках в сумме либо 2, либо 422 мо­не­ты, оба числа чётные. В трёх сун­ду­ках в сумме либо 3, либо 423 мо­не­ты, каж­дое из этих чисел де­лит­ся на 3 и т.д. В семи сун­ду­ках в сумме 7 или 427 монет. Оба числа де­лят­ся на 7. Од­на­ко общее число монет 428 на 8 не де­лит­ся. То есть в этом слу­чае в во­семь сун­ду­ков раз­ло­жить мо­не­ты по­ров­ну не по­лу­чит­ся.

С дру­гой сто­ро­ны, во всех сун­ду­ках из­на­чаль­но могло хра­нить­ся, на­при­мер, по­ров­ну монет. По­это­му точно от­ве­тить на во­прос, не зная, что лежит в сун­ду­ках, нель­зя.

Ответ: а) можно; б) нель­зя

**C 0 № 505747.** За круг­лым сто­лом сидят 4 гнома. Перед каж­дым стоит круж­ка с мо­ло­ком. Один из гно­мов пе­ре­ли­ва­ет ¼ сво­е­го мо­ло­ка со­се­ду спра­ва. Затем сосед спра­ва де­ла­ет то же самое. Затем то же самое де­ла­ет сле­ду­ю­щий сосед спра­ва и на­ко­нец четвёртый гном ¼ ока­зав­ше­го­ся у него мо­ло­ка на­ли­ва­ет пер­во­му. Во всех круж­ках вме­сте мо­ло­ка 2 л.

Сколь­ко мо­ло­ка было пер­во­на­чаль­но в круж­ках, если

а) в конце у всех гно­мов мо­ло­ка ока­за­лось по­ров­ну?

б) в конце у всех гно­мов ока­за­лось мо­ло­ка столь­ко, сколь­ко было в на­ча­ле?

**Ре­ше­ние.**

а) В конце у всех гно­мов ока­за­лось по пол­лит­ра мо­ло­ка. Зна­чит, перед по­след­ним пе­ре­ли­ва­ни­ем у четвёртого гнома было 4/3 · 1/2 = 2/3 л, у пер­во­го 1/2 – 1/6 = 1/3 л, а у двух осталь­ных — по пол­лит­ра. Ана­ло­гич­но, перед тр­тьим пе­ре­ли­ва­ни­ем у тре­тье­го гнома было 2/3 л, у четвёртого 2/3 – 1/6 = 1/2 л, у вто­ро­го — тоже пол­лит­ра, а у пер­во­го — 1/3 л. Со­от­вет­ствен­но, перед вто­рым пе­ре­ли­ва­ни­ем у вто­ро­го гнома было 2/3 л, у тре­тье­го и четвёртого — по пол­лит­ра, а у пер­во­го — 1/3 л. На­ко­нец, в на­ча­ле у 1-го было 4/9 л, у вто­ро­го 5/9 л, у тре­тье­го и четвёртого — по пол­лит­ра.

б) Раз в конце у всех гно­мов ока­за­лось мо­ло­ка столь­ко, сколь­ко было в на­ча­ле, то каж­дый отдал столь­ко же мо­ло­ка, сколь­ко по­лу­чил. Если у 1-го гнома было 4 части мо­ло­ка, то он пе­ре­лил вто­ро­му одну часть, ко­то­рая долж­на со­ста­вить чет­верть его мо­ло­ка после пе­ре­ли­ва­ния (чтобы он мог от­лить одну часть тре­тье­му). То есть у вто­ро­го было 3 части. Ана­ло­гич­но, у тре­тье­го и четвёртого было по 3 части. Зна­чит, от­но­ше­ние объ­е­ма мо­ло­ка у гно­мов было 4 : 3 : 3 : 3. Ре­ша­ем урав­не­ние по­лу­ча­ем: 4*x* + 3*x* + 3*x* + 3*x* + = 2,

Ответ: а) у пер­во­го гнома было 4/9 л, у вто­ро­го — 5/9 л, у тре­тье­го и четвёртого — по пол­лит­ра; б) у пер­во­го гнома было 8/13 л, у осталь­ных — по 6/13 л.

**C 0 № 505753.** Петин счет в банке со­дер­жит 500 дол­ла­ров. Банк раз­ре­ша­ет со­вер­шать опе­ра­ции толь­ко двух видов: сни­мать 300 дол­ла­ров или до­бав­лять 198 дол­ла­ров.

а) Какую мак­си­маль­ную сумму Петя может снять со счета, если дру­гих денег у него нет?

б) Какое наи­мень­шее число опе­ра­ций для этого по­тре­бу­ет­ся?

**Ре­ше­ние.**

По­сколь­ку 300 и 198 де­лят­ся на 6, Петя смо­жет снять лишь сумму, крат­ную 6 дол­ла­рам. Мак­си­маль­ное число, крат­ное 6 и не пре­вос­хо­дя­щее 500, — это 498. До­ка­жем, что снять 498 дол­ла­ров воз­мож­но. Про­из­ве­дем сле­ду­ю­щие опе­ра­ции: 500 – 300 = 200, 200 + 198 = 398, 398 – 300 = 98, 98 + 198 = 296, 296 + 198 = 494. Сумма, ле­жа­щая в банке, умень­ши­лась на 6 дол­ла­ров. Про­де­лав ана­ло­гич­ную про­це­ду­ру 16 раз, Петя сни­мет 96 дол­ла­ров. Затем он может снять 300, по­ло­жить 198 и снова снять 300. В ре­зуль­та­те у него будет 498 дол­ла­ров.

**C 0 № 505765.** Име­ет­ся семь ста­ка­нов с водой: пер­вый ста­кан за­пол­нен водой на­по­ло­ви­ну, вто­рой — на треть, тре­тий — на чет­верть, чет­вер­тый — на одну пятую, пятый — на одну вось­мую, ше­стой — на одну де­вя­тую, и седь­мой — на одну де­ся­тую. Раз­ре­ша­ет­ся пе­ре­ли­вать всю воду из од­но­го ста­ка­на в дру­гой или пе­ре­ли­вать воду из од­но­го ста­ка­на в дру­гой до тех пор, пока он не за­пол­нит­ся до­вер­ху. Может ли после не­сколь­ких пе­ре­ли­ва­ний какой‐ни­будь ста­кан ока­зать­ся за­пол­нен­ным

а) на одну две­на­дца­тую;

б) на одну ше­стую?

**Ре­ше­ние.**

а) Если вме­сти­мость ста­ка­на счи­тать рав­ной 1, то в пер­вых трех ста­ка­нах в сумме 1 и 1/12 воды. Пе­ре­льем в пер­вый ста­кан всю воду из вто­ро­го, а затем из тре­тье­го, пока пер­вый не за­пол­нит­ся. После этого в тре­тьем ста­ка­не ока­жет­ся 1/12.

б) До­ка­жем ин­дук­ци­ей по ко­ли­че­ству пе­ре­ли­ва­ний, что ко­ли­че­ство воды в не­пу­стом ста­ка­не после пе­ре­ли­ва­ний есть либо 1, либо дроб­ная часть суммы не­ко­то­рых из чисел 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/8, 1/9, 1/10, при этом в раз­ных ста­ка­нах в сум­мах участ­ву­ют не­по­вто­ря­ю­щи­е­ся числа. База ин­дук­ции верна. Пусть в ста­ка­нах *A* и *B* ко­ли­че­ство воды равно *a* и *b*со­от­вет­ствен­но. Если из ста­ка­на *A* в ста­кан *B* пе­ре­ли­ва­ет­ся вся вода, то новые ко­ли­че­ства со­став­ля­ют 0 и *a* + *b*, а если ста­кан *B* на­пол­ня­ет­ся из *A* до­вер­ху, то *a* + *b* − 1 и 1. Те­перь ясно, что утвер­жде­ние оста­лось ис­тин­ным.

Пусть 1/6 = *a*1 +...+ *ak* , где *ak* – не­ко­то­рые из чисел 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/8, 1/9, 1/10.

По­ка­жем, что в этой сумме нет чисел 1/4, 1/5, 1/8, 1/9, 1/10. Дей­стви­тель­но, легко про­ве­рить, что если там при­сут­ству­ет хотя бы одно из чисел 1/5 или 1/10 , одно из чисел 1/4 или 1/8 , или число 1/9 , то зна­ме­на­тель по­лу­чив­шей­ся дроби де­лит­ся на 5, 4 или 9 со­от­вет­ствен­но. В то же время число 6 не де­лит­ся ни на одно из этих чисел. Из чисел же 1/2 и 1/3 не­воз­мож­но сло­же­ни­ем по­лу­чить число с дроб­ной ча­стью 1/6 .

Ответ: а) да; б) нет.

**C 0 № 505801.** В Мек­си­ке эко­ло­ги до­би­лись при­ня­тия за­ко­на, по ко­то­ро­му каж­дый ав­то­мо­биль хотя бы один день в не­де­лю не дол­жен ез­дить (вла­де­лец со­об­ща­ет по­ли­ции номер ав­то­мо­би­ля и «вы­ход­ной» день не­де­ли этого ав­то­мо­би­ля). В не­ко­то­рой семье все взрос­лые же­ла­ют ез­дить еже­днев­но (каж­дый — по своим делам!). Сколь­ко ав­то­мо­би­лей (как ми­ни­мум) долж­но быть в семье, если взрос­лых в ней

а) 5 че­ло­век?

б) 8 че­ло­век?

**Ре­ше­ние.**

а) Пяти ав­то­мо­би­лей не хва­тит, так как в день, когда один из ав­то­мо­би­лей «от­ды­ха­ет», кому-то не на чем будет ехать. Шести, оче­вид­но, хва­та­ет. На­при­мер, пер­вый ав­то­мо­биль от­ды­ха­ет в по­не­дель­ник и втор­ник, вто­рой — в среду, тре­тий — в чет­верг, чет­вер­тый — в пят­ни­цу, пятый — в суб­бо­ту, ше­стой в вос­кре­се­нье.

б) Ясно, что ав­то­мо­би­лей не менее 8. Если каж­дый день«от­ды­ха­ет» не более од­но­го ав­то­мо­би­ля, то всего ав­то­мо­би­лей не боль­ше, чем дней не­де­ли, то есть семи. Зна­чит, в какой-то день от­ды­ха­ет два ав­то­мо­би­ля, и в этот день нам надо ещё как ми­ни­мум 8 ав­то­мо­би­лей. Итого 10. Мы до­ка­за­ли, что мень­ше, чем де­ся­тью ав­то­мо­би­ля­ми обой­тись нель­зя. Де­ся­ти до­ста­точ­но — со­ста­вим таб­ли­цу. Столб­цы — ав­то­мо­би­ли, стро­ки — дни не­де­ли. Зе­ле­ным от­ме­тим отдых ав­то­мо­би­ля.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| Пн |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| Вт |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| Ср |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| Чт |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| Пт |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| Сб |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| Вскр |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

**C 0 № 505869.** У Лены три на­бо­ра, в каж­дом из ко­то­рых оди­на­ко­вое ко­ли­че­ство ручек (боль­ше 1). У Юли не­сколь­ко (боль­ше 1) на­бо­ров ручек, по 5 штук в каж­дом.

а) При каком ко­ли­че­стве на­бо­ров у Юли, ко­ли­че­ство всех ручек у Лены не­чет­но, если всего у де­во­чек 105 ручек?

б) Можно ли раз­ло­жить все ручки Юли и Лены в 12 на­бо­ров по 12 ручек в кждом?

в) Можно ли раз­ло­жить все ручки Юли и Лены в *k* на­бо­ров по *k* ручек в каж­дом (*k* > 3)?

**Ре­ше­ние.**

а) Пусть в каж­дом Ле­ни­ном на­бо­ре http://reshuege.ru/formula/2d/2db95e8e1a9267b7a1188556b2013b33.png ручек, а у Юли http://reshuege.ru/formula/7b/7b774effe4a349c6dd82ad4f4f21d34c.png на­бо­ров. Тогда по­лу­ча­ем урав­не­ние: http://reshuege.ru/formula/72/72788d44fa9131158892fe47a010875c.png По усло­вию у Лены не­чет­ное число ручек, зна­чит http://reshuege.ru/formula/3c/3c26ded50693926656dbaeb1c67eb876.png не­чет­но, и, со­от­вет­ствен­но, http://reshuege.ru/formula/2d/2db95e8e1a9267b7a1188556b2013b33.png не­чет­но. За­ме­тим, что http://reshuege.ru/formula/ff/ff45ed828603f0045cd14f359a833603.png зна­чит http://reshuege.ru/formula/2d/2db95e8e1a9267b7a1188556b2013b33.png де­лит­ся на 5. Кроме того, http://reshuege.ru/formula/9a/9aa68ad15eb0959dcb6bdcfee3219c04.png Зна­чит, оста­лось пе­ре­брать такие слу­чаи: http://reshuege.ru/formula/87/87fcb20037ccbd7229c77e4fee7b5e5b.png Тогда со­от­вет­ствен­но, http://reshuege.ru/formula/95/9560d22e2a87ab3da39879b713bdba69.png

б) Ис­поль­зуя те же обо­зна­че­ния, по­лу­ча­ем урав­не­ние: http://reshuege.ru/formula/29/29b88fb5a838818f5a05688c35f4afc3.png До­ста­точ­но по­до­брать целые корни, боль­шие еди­ни­цы. На­при­мер, под­хо­дят числа http://reshuege.ru/formula/53/53045295d6ecd6b6b58455f641623f9e.png

в) Те­перь по­лу­ча­ем урав­не­ние: http://reshuege.ru/formula/a4/a43d57e29a8c11db27f877cd23746d9a.png или http://reshuege.ru/formula/b6/b60c21374b760dfd817a700a2a4dfce9.png До­ка­жем, что для лю­бо­го це­ло­го http://reshuege.ru/formula/5f/5f6d620e99657055a584d50dd1c5a436.png най­дут­ся целые корни http://reshuege.ru/formula/10/10064a04b7eb02e54039a5dda58fede7.png боль­шие еди­ни­цы.

Раз­бе­рем не­сколь­ко слу­ча­ев. Пусть http://reshuege.ru/formula/8c/8ce4b16b22b58894aa86c421e8759df3.png де­лит­ся на 5. Тогда можно взять http://reshuege.ru/formula/67/6725605619512411045b98ed68a1d103.png и ясно, что под­хо­дя­щее http://reshuege.ru/formula/7b/7b774effe4a349c6dd82ad4f4f21d34c.png най­дет­ся. Пусть http://reshuege.ru/formula/8c/8ce4b16b22b58894aa86c421e8759df3.png дает оста­ток 1 или 4 при де­ле­нии на 5. Тогда http://reshuege.ru/formula/54/5436fd3f474a5f35c684ff40dd257ec6.png дает оста­ток 1 при де­ле­нии на 5. Далее возь­мем http://reshuege.ru/formula/78/7877972e3a37a8e92ffd300a35e0efff.png да­ю­щее оста­ток 2 при де­ле­нии на 5. Тогда http://reshuege.ru/formula/44/4457c7c7efcf68ca49cacf822ed2dcaf.png де­лит­ся на 5, и нуж­ное http://reshuege.ru/formula/7b/7b774effe4a349c6dd82ad4f4f21d34c.png су­ще­ству­ет. Пусть http://reshuege.ru/formula/8c/8ce4b16b22b58894aa86c421e8759df3.png дает оста­ток 2 или 3 при де­ле­нии на 5. Тогда http://reshuege.ru/formula/44/4457c7c7efcf68ca49cacf822ed2dcaf.png дает оста­ток 4 при де­ле­нии на 5. Далее возь­мем http://reshuege.ru/formula/78/7877972e3a37a8e92ffd300a35e0efff.png да­ю­щее оста­ток 3 при де­ле­нии на 5. Тогда http://reshuege.ru/formula/44/4457c7c7efcf68ca49cacf822ed2dcaf.png де­лит­ся на 5, и нуж­ное http://reshuege.ru/formula/7b/7b774effe4a349c6dd82ad4f4f21d34c.png су­ще­ству­ет.

Ответ: а) 18, 12, 6; б) да; в) да.

**C 0 № 505905.** Гу­бер­на­тор Тить­кин решил ор­га­ни­зо­вать ав­то­бус­ное дви­же­ние между де­рев­ня­ми Верх­нее и Ниж­нее Га­дю­ки­но. Ав­то­бу­сы‐экс­прес­сы будут сле­до­вать из Ниж­не­го Га­дю­ки­но в Верх­нее без оста­но­вок круг­ло­су­точ­но с ин­тер­ва­лом ровно 7 минут, оста­нав­ли­вать­ся в ко­неч­ном пунк­те на какое‐то время и от­прав­лять­ся об­рат­но, тратя на до­ро­гу в одну сто­ро­ну ровно 25 минут. При этом на ко­неч­ных оста­нов­ках не долж­но на­хо­дить­ся более од­но­го ав­то­бу­са од­но­вре­мен­но. Сколь­ко ав­то­бу­сов по­тре­бу­ет­ся ку­пить гу­бер­на­то­ру?

**Ре­ше­ние.**

Пусть на ко­неч­ных оста­нов­ках ав­то­бу­сы стоят ровно *t* минут. Ясно, что *t* < 7, так как иначе будут мо­мен­ты вре­ме­ни, когда на одной оста­нов­ке на­хо­дят­ся как ми­ни­мум два ав­то­бу­са (сле­ду­ю­щий будет при­ез­жать на ко­неч­ную рань­ше, чем преды­ду­щий с неё уедет). Тогда по­лу­ча­ет­ся, что пол­ный круг ав­то­бус со­вер­ша­ет за 50 + 2*t* минут (два участ­ка езды по 25 минут и две сто­ян­ки по *t* минут). Если ав­то­бу­сов *n* штук и ин­тер­вал между ними 7 минут, то по­лу­ча­ет­ся ра­вен­ство: 7*n* = 50 + 2*t*. Таким об­ра­зом, 50 < 7*n* < 64. Вспо­ми­ная, что *n* — целое, по­лу­ча­ем, что ав­то­бу­сов долж­но быть за­куп­ле­но 8 или 9.

Ответ: 8 или 9.

**C 0 № 505947.** а) На по­сто­я­лом дворе оста­но­вил­ся пу­те­ше­ствен­ник, и хо­зя­ин со­гла­сил­ся в ка­че­стве упла­ты за про­жи­ва­ние брать коль­ца зо­ло­той це­поч­ки, ко­то­рую тот носил на руке. Но при этом он по­ста­вил усло­вие, чтобы опла­та была еже­днев­ной: каж­дый день хо­зя­ин дол­жен был иметь на одно коль­цо боль­ше, чем в преды­ду­щий. За­мкну­тая в коль­цо це­поч­ка со­дер­жа­ла 11 колец, а пу­те­ше­ствен­ник со­би­рал­ся про­жить ровно 11 дней, по­это­му он со­гла­сил­ся. Какое наи­мень­шее число колец он дол­жен рас­пи­лить, чтобы иметь воз­мож­ность пла­тить хо­зя­и­ну?

б) Из сколь­ких колец долж­на со­сто­ять це­поч­ка, чтобы пу­те­ше­ствен­ник мог про­жить на по­сто­я­лом дворе наи­боль­шее число дней при усло­вии, что он может рас­пи­лить толь­ко *n* колец?

**Ре­ше­ние.**

а) Хотя бы одно коль­цо надо рас­пи­лить. Тогда по­лу­ча­ет­ся одно рас­пи­лен­ное коль­цо и це­поч­ка, со­дер­жа­щая 10 колец. Ясно, что уже на вто­рой день про­из­ве­сти опла­ту не удаст­ся. Зна­чит, рас­пи­лов долж­но быть как ми­ни­мум два. По­ка­жем, что этого хва­тит: рас­пи­лим чет­вер­тое коль­цо по­лу­чен­ной це­поч­ки (из де­ся­ти колец). Тогда будем иметь два рас­пи­лен­ных коль­ца, одну це­поч­ку в три коль­ца и одну в шесть колец. В пер­вый день от­да­ем коль­цо, во вто­рой еще одно. На тре­тий день от­да­ем це­поч­ку из трёх колец, и по­лу­ча­ем назад два коль­ца. На чет­вер­тый и пятый день от­да­ем оп од­но­му коль­цу. На ше­стой день от­да­ем це­поч­ку из шести колец и по­лу­ча­ем об­рат­но пять колец. Далее ясно.

б) Раз­ре­за­ние http://reshuege.ru/formula/7b/7b8b965ad4bca0e41ab51de7b31363a1.png колец дает http://reshuege.ru/formula/7b/7b8b965ad4bca0e41ab51de7b31363a1.png рас­пи­лен­ных колец и не более чем http://reshuege.ru/formula/7b/7b8b965ad4bca0e41ab51de7b31363a1.png це­по­чек.

Для вы­пол­не­ния усло­вий за­да­чи самая ко­рот­кая це­поч­ка не может со­сто­ять более, чем из http://reshuege.ru/formula/48/488968c8363007fe20e033f70ad0b931.png коль­ца. Сле­ду­ю­щая по длине не может со­сто­ять из более чем http://reshuege.ru/formula/a3/a34fe5c6c359f839f8611086a6f7459e.png коль­ца. Сле­ду­ю­щая по длине це­поч­ка не может со­сто­ять из более чем http://reshuege.ru/formula/1c/1c20d352b5765e16d9b57f98a71d98b4.png коль­ца. И так далее. По­лу­ча­ет­ся гео­мет­ри­че­ская про­грес­сия со зна­ме­на­те­лем 2. Таким об­ра­зом, мак­си­маль­но в ис­ход­ной це­поч­ке может быть

http://reshuege.ru/formula/f5/f595e7f566719b34181dc8234af4661a.png

http://reshuege.ru/formula/71/71177bf6ec2dd9cf086106f90423525e.png колец.

**C 0 № 505953.** Тре­бу­ет­ся сде­лать набор гирек, каж­дая из ко­то­рых весит целое число грам­мов, с по­мо­щью ко­то­рых можно взве­сить любой целый вес от 1 грам­ма до 55 грам­мов вклю­чи­тель­но даже в том слу­чае, если не­ко­то­рые гирь­ки по­те­ря­ны (гирь­ки кла­дут­ся на одну чашку весов, из­ме­ря­е­мый вес — на дру­гую).

а) не­об­хо­ди­мо по­до­брать 10 гирек, из ко­то­рых может быть по­те­ря­на любая одна;

б) не­об­хо­ди­мо по­до­брать 12 гирек, из ко­то­рых могут быть по­те­ря­ны любые две. (В обоих слу­ча­ях до­ка­жи­те, что най­ден­ный Вами набор гирек об­ла­да­ет тре­бу­е­мы­ми свой­ства­ми.)

**Ре­ше­ние.**

а) Рас­смот­рим пер­вые де­сять чисел Фи­бо­нач­чи (это члены по­сле­до­ва­тель­но­сти, ко­то­рая за­да­ет­ся фор­му­лой: http://reshuege.ru/formula/19/196a2511f5908a4bb01a207bd96dcfd2.png). Это числа 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55. До­ка­жем, что набор гирек с та­ки­ми ве­са­ми удо­вле­тво­ря­ет усло­вию за­да­чи. Ясно, что с по­мо­щью дан­ных де­ся­ти гирек можно на­брать любую массу от 1 до 55. Пусть те­перь мы по­те­ря­ли гирь­ку с но­ме­ром http://reshuege.ru/formula/00/00884c5e389a26ffde2fb1e712dac2e2.png Тогда из гирек можно на­брать любую массу от 1 до

http://reshuege.ru/formula/38/380bccbeb2bf46093c702fc0fe40e8fe.png

До­ба­вим те­перь гирю с но­ме­ром http://reshuege.ru/formula/4d/4dfae00b9985ecf173e5180c8659759c.png Тогда по­лу­чит­ся на­брать любую массу от 1 до http://reshuege.ru/formula/b5/b59e0a8e4ea140fccdc04e106494281f.png Ана­ло­гич­но, до­бав­ляя по гирь­ке, можно на­брать любую массу вплоть до 55. Если же по­те­ря­на самая тя­же­лая гиря, то можно на­брать любой вес от 1 до http://reshuege.ru/formula/43/4357b7ef2eaac11cee2c0eff13c177fd.png

б) Рас­смот­рим те­перь не­мно­го дру­гую по­сле­до­ва­тель­ность: http://reshuege.ru/formula/ef/ef28502de2e80e937cf463b5a90b9583.png Возь­мем набор гирек, веса ко­то­рых равны пер­вым две­на­дца­ти чле­нам этой по­сле­до­ва­тель­но­сти: 1, 1, 1, 2, 3, 4, 6, 9, 13, 19, 28, 41.Такой набор удо­вле­тво­ря­ет усло­вию за­да­чи. До­ка­за­тель­ство ана­ло­гич­но пунк­ту а).

**C 0 № 505983.** Ав­то­бус­ные би­ле­ты имеют но­ме­ра от 000000 до 999999. Билет на­зы­ва­ет­ся счаст­ли­вым, если сумма пер­вых трех цифр его но­ме­ра равна сумме по­след­них трех его цифр. До­ка­жи­те, что:

а) число всех счаст­ли­вых би­ле­тов четно;

б) сумма но­ме­ров всех счаст­ли­вых би­ле­тов де­лит­ся на 999.

**Ре­ше­ние.**

а) Каж­до­му счаст­ли­во­му би­ле­ту по­ста­вим в со­от­вет­ствие билет, номер ко­то­ро­го со­сто­ит из цифр, до­пол­ня­ю­щих со­от­вет­ству­ю­щие цифры но­ме­ра ис­ход­но­го би­ле­та до де­вят­ки. На­при­мер, билет 239601 по­лу­чит в пару билет 760398. Оче­вид­но, парой к каж­до­му счаст­ли­во­му би­ле­ту яв­ля­ет­ся также счаст­ли­вый билет. При этом ни­ка­кой билет не по­лу­ча­ет в пару себя (цифра не может до­пол­нять до де­вят­ки самое себя, по­сколь­ку 9 — не­чет­ное число). Таким об­ра­зом, мы по­лу­чи­ли раз­би­е­ние всех счаст­ли­вых би­ле­тов на пары.

б) Рас­смот­рим спо­соб раз­би­е­ния би­ле­тов на пары из пунк­та а). Сумма но­ме­ров би­ле­тов в каж­дой паре равна 999999 = 9 · 1001, зна­чит, она де­лит­ся на 999. Сло­жив эти по­пар­ные суммы, по­лу­чим число, крат­ное 999.

**C 0 № 505989.** Ска­жем, что ко­ло­да из 52 карт сло­же­на пра­виль­но, если любая пара ле­жа­щих рядом карт сов­па­да­ет по масти или по до­сто­ин­ству, то же верно для верх­ней и ниж­ней карты, и на­вер­ху лежит туз пик. До­ка­жи­те, что число спо­со­бов сло­жить ко­ло­ду пра­виль­но

а) де­лит­ся на 12!;

б) де­лит­ся на 13!.

**Ре­ше­ние.**

Оче­вид­но, пра­виль­но­му рас­по­ло­же­нию карт в ко­ло­де со­от­вет­ству­ет коль­це­вой обход ла­дьей (ко­то­рая может пры­гать через клет­ки!) доски 4 × 13 (го­ри­зон­та­ли со­от­вет­ству­ют ма­стям, а вер­ти­ка­ли — до­сто­ин­ствам), на­чи­на­ю­щий­ся и кон­ча­ю­щий­ся в клет­ке, со­от­вет­ству­ю­щей тузу пик (будем счи­тать, что это левый ниж­ний угол). Такой обход удоб­но за­ко­ди­ро­вать, за­ну­ме­ро­вав клет­ки от 1 до 52, где 1 стоит в левом ниж­нем углу, а любая пара со­сед­них но­ме­ров (вклю­чая 1 и 52) стоит в одной стро­ке или в одном столб­це.

а) Со­вер­шив любую из (12! − 1) не­три­ви­аль­ных пе­ре­ста­но­вок 12 пра­вых вер­ти­ка­лей, мы из дан­но­го об­хо­да по­лу­чим новый (дру­гая ну­ме­ра­ция!). Таким об­ра­зом, все об­хо­ды раз­би­ва­ют­ся на груп­пы по 12! об­хо­дов.

б) До­ста­точ­но до­ка­зать, что это число де­лит­ся на 13. Свер­нем доску в ци­линдр, скле­ив вер­ти­каль­ные сто­ро­ны. Любой из 12 воз­мож­ных по­во­ро­тов ци­лин­дра пе­ре­во­дит дан­ный обход в дру­гой, на­чи­на­ю­щий­ся уже не с «туза пик». Но по­сколь­ку он про­хо­дит через эту клет­ку, то его можно рас­смат­ри­вать как «пра­виль­ный обход» (со­от­вет­ству­ю­щую ну­ме­ра­цию можно по­лу­чить, сдви­нув все но­ме­ра на одно и то же число по мо­ду­лю 52 так, чтобы в левом ниж­нем углу ока­за­лась 1). Ниже мы по­ка­жем, что этот обход от­ли­ча­ет­ся от пер­во­на­чаль­но­го. Таким об­ра­зом, все об­хо­ды раз­би­ва­ют­ся на груп­пы по 13 об­хо­дов.

Вос­ста­но­вим про­пу­щен­ный мо­мент. Пусть при по­во­ро­те не­ко­то­рый обход пе­ре­хо­дит в себя. Рас­смот­рим любой го­ри­зон­таль­ный ход (он дол­жен быть). По­вто­рив по­во­рот 13 раз, видим, что из каж­дой клет­ки этой го­ри­зон­та­ли мы вы­хо­ди­ли по го­ри­зон­та­ли, то есть сме­нить эту масть нель­зя. Про­ти­во­ре­чие.

**C 0 № 505995.** Груп­па пси­хо­ло­гов раз­ра­бо­та­ла тест, прой­дя ко­то­рый, каж­дый че­ло­век по­лу­ча­ет оцен­ку — число *Q*— по­ка­за­тель его ум­ствен­ных спо­соб­но­стей (чем боль­ше *Q*, тем боль­ше спо­соб­но­сти). За рей­тинг стра­ны при­ни­ма­ет­ся сред­нее ариф­ме­ти­че­ское зна­че­ний Q всех жи­те­лей стра­ны.

а) Груп­па граж­дан стра­ны *A* эми­гри­ро­ва­ла в стра­ну *B*. Мог ли при этом у обеих стран вы­рас­ти рей­тинг?

б) После этого груп­па граж­дан стра­ны B (в числе ко­то­рых могут быть и быв­шие эми­гран­ты из *A*) эми­гри­ро­ва­ла в стра­ну *A*. Воз­мож­но ли, что рей­тин­ги обеих стран опять вы­рос­ли?

в) Груп­па граж­дан стра­ны *A* эми­гри­ро­ва­ла в стра­ну *B*, а груп­па граж­дан *B* — в стра­ну *C*. В ре­зуль­та­те рей­тин­ги каж­дой стра­ны ока­за­лись выше пер­во­на­чаль­ных. После этого на­прав­ле­ние ми­гра­ци­он­ных по­то­ков из­ме­ни­лось на про­ти­во­по­лож­ное – часть жи­те­лей *C* пе­ре­еха­ла в *B*, а часть жи­те­лей *B* – в *A*. Ока­за­лось, что в ре­зуль­та­те рей­тин­ги всех стран опять вы­рос­ли (по срав­не­нию с теми, что были после пер­во­го пе­ре­ез­да, но до на­ча­ла вто­ро­го). Может ли такое быть (если да, то как, если нет, то по­че­му)? Пред­по­ла­га­ет­ся, что за рас­смат­ри­ва­е­мое время *Q* граж­дан не из­ме­ни­лось, никто не умер и не ро­дил­ся.

**Ре­ше­ние.**

а) Пусть в стра­не *A* три жи­те­ля с по­ка­за­те­ля­ми 5, 5 и 2. Пусть жи­тель с по­ка­за­те­лем 2 эми­гри­ро­вал в стра­ну *Б* в ко­то­рой до этого жил всего один жи­тель с по­ка­за­те­лем 1. Тогда рей­тинг стра­ны *A* вы­рас­тет с 4 до 5, а рей­тинг стра­ны*Б* вы­рас­тет с 1 до 1,5.

б) По­ка­жем, что при объ­еди­не­нии двух групп людей с рей­тин­га­ми http://reshuege.ru/formula/b7/b7000dd9eb57a731c41f8c85a55ff36a.png и http://reshuege.ru/formula/58/582f5912ee1ea2984f114045c82e72ef.png рей­тинг http://reshuege.ru/formula/e1/e1e1d3d40573127e9ee0480caf1283d6.png новой груп­пы удо­вле­тво­ря­ет усло­вию http://reshuege.ru/formula/28/283f3793081c63c280220be53c4c8c1a.png Дей­стви­тель­но, пусть по­ка­за­те­ли пер­вой груп­пы такие: http://reshuege.ru/formula/3a/3a03dabe9bfa40d187808ec2f4fb6efb.png а вто­рой груп­пы такие: http://reshuege.ru/formula/d3/d3b418b363fb3e604f93c5380edc4f5d.png

Тогда

http://reshuege.ru/formula/6b/6b2a59cf38c72ac1d289e2c0e9a77332.png

Тогда http://reshuege.ru/formula/8f/8fc2fccd5897a8fb5ec755f465f4c27d.png тогда http://reshuege.ru/formula/81/817458c08fd823bd0488f93627a3a2a5.png Тогда http://reshuege.ru/formula/50/50bb697353ae0b89c957c590c739a171.pngтогда http://reshuege.ru/formula/09/0909ad2e91b9209438cfd1fdca3a8f2e.png

Те­перь ясно, что рей­тинг обеих стран в ре­зуль­та­те эми­гра­ции может вы­рас­ти од­но­вре­мен­но толь­ко если груп­па эми­гран­тов имеет рей­тинг ниже рей­тин­га стра­ны, из ко­то­рой они уез­жа­ют, и выше рей­тин­га стра­ны, в ко­то­рую они при­ез­жа­ют. Таким об­ра­зом, при об­рат­ной эми­гра­ции од­но­вре­мен­ное по­вы­ше­ние рей­тин­га не­воз­мож­но.

в) При­ве­дем при­мер такой си­ту­а­ции: пусть в стра­не *A* всего два жи­те­ля с по­ка­за­те­ля­ми 1 и 3, в стра­не *Б* пять жи­те­лей с по­ка­за­те­ля­ми 4, 4, 6, 6 и 55, в стра­не B один жи­тель с по­ка­за­те­лем 1.

Во время пер­вой волны эми­гра­ции из *A* в *B* пе­ре­ехал один жи­тель с по­ка­за­те­лем 1, из *Б* в *В* пе­ре­еха­ло двое жи­те­лей с по­ка­за­те­лем 4. Тогда рей­тин­ги из­ме­ни­лись так: у *А* вырос с 2 до 3, у *Б* с 15 до 17, у *В* с 1 до 3.

Во время вто­рой волны эми­гра­ции из *В* в *Б* пе­ре­ехал один жи­тель с по­ка­за­те­лем 1, из *Б* в *А* пе­ре­еха­ло двое жи­те­лей с по­ка­за­те­лем 6. Тогда рей­тин­ги из­ме­ни­лись так: у *А* вырос с 3 до 5, у *Б* с 17 до 19, у *В* с 3 до 4.

Ответ: а) да; б) нет; в) да.

**C 0 № 506001.** В школе, где учат­ся Поля, Маня и Дуня, есть длин­ный ко­ри­дор вдоль одной из стен ко­то­ро­го рас­по­ло­жен длин­ный ряд из n ячеек, за­ну­ме­ро­ван­ных на­ту­раль­ны­ми чис­ла­ми от 1 до n, за­кры­ва­ю­щих­ся на замки, в ко­то­рых школь­ни­ки могут хра­нить свои лич­ные вещи. Од­на­ж­ды, придя в школу в вы­ход­ной день, Поля об­на­ру­жи­ла все ячей­ки от­кры­ты­ми. Она стала об­хо­дить ряд ячеек сна­ча­ла до конца, за­кры­вая на замок каж­дую вто­рую ячей­ку. До­стиг­нув конца ряда, она раз­вер­ну­лась и снова стала за­кры­вать на замок каж­дую вто­рую ячей­ку из тех, ко­то­рые еще были от­кры­ты. Таким об­ра­зом Поля про­дол­жа­ла об­хо­дить ряд и за­кры­вать на замок ячей­ки до тех пор, пока оста­лась не­за­кры­той одна ячей­ка.

Обо­зна­чим http://reshuege.ru/formula/a8/a8988ce0f88f5292aa28b6e49f114d45.png номер по­след­ней от­кры­той ячей­ки. На­при­мер, если ко­ли­че­ство ячеек http://reshuege.ru/formula/fd/fd7a91d8c1a2e97c8c10f0c75b27aa57.png то http://reshuege.ru/formula/01/014761def2cc9d6cd90412e0a249c719.png как по­ка­за­но на ри­сун­ке

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |  |
| → | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |  |
|  | 1 |  | 3 |  | 5 |  | 7 |  | 9 |  | 11 |  | 13 |  | 15 | ← |
| → |  |  | 3 |  |  |  | 7 |  |  |  | 11 |  |  |  | 15 |  |
|  |  |  | 3 |  |  |  |  |  |  |  | 11 |  |  |  |  | ← |

а) Най­ди­те http://reshuege.ru/formula/43/43025b6791bb6faf0006ad130ac78889.png

До­ка­жи­те, что:

б) не су­ще­ству­ет на­ту­раль­но­го числа http://reshuege.ru/formula/1a/1a58f249932a2915e61842f01ae0feca.png та­ко­го что http://reshuege.ru/formula/0b/0b9cde21c431ec6e75ee8883b76afbdd.png

в) су­ще­ству­ет бес­ко­неч­ное мно­же­ство на­ту­раль­ных чисел http://reshuege.ru/formula/1a/1a58f249932a2915e61842f01ae0feca.png таких что http://reshuege.ru/formula/41/41c84e083b2d6e0d50e63cecfdf68726.png

**Ре­ше­ние.**

а)Во время пер­во­го про­хо­да слева на­пра­во Поля за­кро­ет все ячей­ки с чётными но­ме­ра­ми. От­кры­ты­ми оста­нут­ся ячей­ки с нечётными но­ме­ра­ми: 1, 3, …, 47, 49.

Во время вто­ро­го про­хо­да спра­ва на­ле­во Поля за­кро­ет ячей­ки, но­ме­ра ко­то­рых при де­ле­нии на 4 дают в остат­ке 3: 47, 43, 39, …, 3. От­кры­ты­ми оста­нут­ся ячей­ки, но­ме­ра ко­то­рых при де­ле­нии на 4 дают в остат­ке 1: 1, 5, …, 45, 49.

Во время тре­тье­го про­хо­да слева на­пра­во Поля за­кро­ет все ячей­ки, но­ме­ра ко­то­рых дают при де­ле­нии на 8 в остат­ке 5: 5, 13, 21, 29, 37, 45. От­кры­ты­ми оста­нут­ся ячей­ки, но­ме­ра ко­то­рых при де­ле­нии на 8 дают в остат­ке 1: 1, 9, 17, 25, 33, 41, 49.

Во время четвёртого про­хо­да спра­ва на­ле­во Поля за­кро­ет ячей­ки, но­ме­ра ко­то­рых при де­ле­нии на 16 дают в остат­ке 9: 41, 25, 9. От­кры­ты­ми оста­нут­ся ячей­ки, но­ме­ра ко­то­рых при де­ле­нии на 16 дают в остат­ке 1: 1, 17, 33, 49.

Во время пя­то­го про­хо­да слева на­пра­во Поля за­кро­ет все ячей­ки, но­ме­ра ко­то­рых дают при де­ле­нии на 32 в остат­ке 17: 17, 49. От­кры­ты­ми оста­нут­ся ячей­ки, но­ме­ра ко­то­рых при де­ле­нии на 32 дают в остат­ке 1: 1, 33.

Во время ше­сто­го про­хо­да спра­ва на­ле­во Поля за­кро­ет ячей­ку 1, номер ко­то­рой при де­ле­нии на 64 даёт в остат­ке 1. От­кры­той оста­нет­ся ячей­ка 33, номер ко­то­рой при де­ле­нии на 64 даёт в остат­ке 33.

Таким об­ра­зом, http://reshuege.ru/formula/f6/f6bd2bceddc98ca4c2d60c8d9f63225b.png

б) Пред­по­ло­жим, что на­шлось http://reshuege.ru/formula/1a/1a58f249932a2915e61842f01ae0feca.png такое что

http://reshuege.ru/formula/b6/b61aba996cfb4e5af079a81285d0759d.png т. е. по­след­ней от­кры­той ячей­кой яв­ля­ет­ся ячей­ка с но­ме­ром 2013.

Пре­жде всего, за­ме­тим, что если http://reshuege.ru/formula/7b/7b8b965ad4bca0e41ab51de7b31363a1.png — чётно, то http://reshuege.ru/formula/f6/f6ab55360da2c8fbf90a0f6d4ed83df9.png по­сколь­ку по­след­няя ячей­ка с но­ме­ром http://reshuege.ru/formula/7b/7b8b965ad4bca0e41ab51de7b31363a1.png будет за­кры­та при пер­вом про­хо­де ряда слева на­пра­во, таким об­ра­зом, если бы эта ячей­ка от­сут­ство­ва­ла, то на зна­че­нии но­ме­ра по­след­ней от­кры­той ячей­ки это бы не от­ра­зи­лось. Зна­чит, можно счи­тать http://reshuege.ru/formula/7b/7b8b965ad4bca0e41ab51de7b31363a1.png нечётным. Во время пер­во­го про­хо­да слева на­пра­во Поля за­кро­ет все ячей­ки с чётными но­ме­ра­ми. От­кры­ты­ми оста­нут­ся ячей­ки с нечётными но­ме­ра­ми, то есть с но­ме­ра­ми http://reshuege.ru/formula/86/86c561094c398ae32ba840528359ff2a.png да­ю­щи­ми при де­ле­нии на 4 в остат­ке 1 или 3.

Число 2013 при де­ле­нии на 4 даёт в остат­ке 1. По­сколь­ку эта ячей­ка оста­лась от­кры­той, то во время вто­ро­го про­хо­да спра­ва на­ле­во Поля за­кро­ет ячей­ки, но­ме­ра ко­то­рых при де­ле­нии на 4 дают в остат­ке 3. От­кры­ты­ми оста­нут­ся ячей­ки с но­ме­ра­ми http://reshuege.ru/formula/86/86c561094c398ae32ba840528359ff2a.png да­ю­щи­ми при де­ле­нии на 4 в остат­ке 1, то есть с но­ме­ра­ми, да­ю­щи­ми при де­ле­нии на 8 в остат­ке 1 или 5.

По­сколь­ку ячей­ка с но­ме­ром 1 оста­лась от­кры­той, то во время тре­тье­го про­хо­да слева на­пра­во Поля за­кро­ет ячей­ки, но­ме­ра ко­то­рых при де­ле­нии на 8 дают в остат­ке 5. Число 2013 при де­ле­нии на 8 даёт в остат­ке 5. Зна­чит, она долж­на быть за­кры­та во время тре­тье­го про­хо­да ряда. По­лу­чи­ли про­ти­во­ре­чие. Сле­до­ва­тель­но, не су­ще­ству­ет на­ту­раль­но­го числа http://reshuege.ru/formula/1a/1a58f249932a2915e61842f01ae0feca.png та­ко­го что http://reshuege.ru/formula/ab/ab6d7713b111141b3648e0b5391d22a9.png

в) Пусть http://reshuege.ru/formula/74/745d454d0922ac8da522ebb4a6731a0c.png где http://reshuege.ru/formula/57/57fe4af0161d3e0b4450b72dbf491c69.png тогда http://reshuege.ru/formula/89/89101f2f556dfa7b2d57761cd00ff3e6.png После пер­вых шести про­хо­дов из пер­вых 50 ячеек оста­нет­ся от­кры­той одна ячей­ка с но­ме­ром 33, а ко­ли­че­ство от­кры­тых ячеек с но­ме­ра­ми, боль­ши­ми 50, умень­шит­ся в http://reshuege.ru/formula/71/71280ad2e4fc24739bbf2e84f1764136.pngраз и будет равно http://reshuege.ru/formula/21/214f2a744516be57d2fdb1519fc49ba1.png Если http://reshuege.ru/formula/e6/e65579c794ff2e0a286bf04c1f410534.png то после каж­дой пары про­хо­дов слева на­пра­во и спра­ва на­ле­во ячей­ка с но­ме­ром 33 будет оста­вать­ся от­кры­той, а ко­ли­че­ство ячеек с но­ме­ра­ми, боль­ши­ми 50, будет умень­шать­ся в 4 раза. В конце кон­цов, оста­нут­ся от­кры­ты­ми 2 ячей­ки: одна — с но­ме­ром 33, и дру­гая – с каким‐то но­ме­ром, боль­шим 50, ко­то­рая будет за­кры­та во время по­след­не­го про­хо­да слева на­пра­во. Зна­чит, http://reshuege.ru/formula/64/6432eb466000a1055ec745a38bce191d.png

Ответ: а) 33; в) 33.

**C 0 № 506013.** У Кости была кучка из 100 ка­меш­ков. Каж­дым ходом он делил какую-то из кучек на две мень­ших, пока у него не ока­за­лось 100 кучек по од­но­му ка­меш­ку.

а) воз­мож­но ли, что в какой-то мо­мент в каких-то 30 куч­ках было ровно 60 ка­меш­ков;

б) воз­мож­но ли, что в какой-то мо­мент в каких-то 20 куч­ках было в сумме ровно 60 ка­меш­ков;

в) мог ли Костя дей­ство­вать так, чтобы ни в какой мо­мент не на­шлось 19 кучек, в ко­то­рых в сумме ровно 60 ка­меш­ков?

**Ре­ше­ние.**

а) До­ждем­ся, когда кучек ста­нет 70. Среди них най­дет­ся 40 кучек по од­но­му ка­меш­ку, (иначе ка­меш­ков будет не мень­ше, чем 2 · 31 + 39 = 101). Если от­бро­сить эти 40 кучек, оста­нет­ся 30 кучек, со­дер­жа­щих 60 ка­меш­ков.

б) До­ка­жем по ин­дук­ции, что при *n* = 2, 3, … 20 в не­ко­то­рый мо­мент най­дет­ся 2*n* + 6 кам­ней в *n* + 20 куч­ках.

База: *n* = 20. После со­ро­ко­во­го хода у нас 100 кам­ней в 40 куч­ках.

Шаг: пусть *n* > 2 и есть 2*n* + 6 кам­ней в *n* + 20 куч­ках. Среди них най­дет­ся кучка из двух кам­ней или 2 кучки по од­но­му камню, по­сколь­ку (*n* + 19) + 1 > 2*n* + 60. От­бро­сим их и во вто­ром слу­чае до­ждем­ся, когда Костя разо­бьет одну из остав­ших­ся кучек на две. Тогда *n* умень­шит­ся на еди­ни­цу.

При *n* = 2 имеем 64 камня в 22 куч­ках. До­ка­жем, что мы можем на­брать 4 камня двумя или более куч­ка­ми. Пусть нет, тогда если есть кучка из од­но­го камня, то кам­ней не мень­ше, чем 1 + 1 + 1 + 4 · 19 > 64 если нет, то кам­ней не мень­ше, чем 2 + 3 · 21 > 64. Про­ти­во­ре­чие. От­бро­сив эти 4 камня мы по­лу­чим 60 кам­ней в 20 или менее куч­ках. Если кучек мень­ше 20, то оста­лось до­ждать­ся, когда кучек ста­нет ровно 20.

в) Пусть Костя от­де­ля­ет от самой боль­шой кучи по три ка­меш­ка до тех пор, пока не оста­нет­ся кучка из че­ты­рех кам­ней. До сих пор была ровно одна куча, число ка­меш­ков в ко­то­рой не де­ли­лось на 3. Сумма в любых 19 куч­ках с ее уча­сти­ем не де­ли­лась на 3, а без неё не пре­вос­хо­ди­ла 57, то есть не могла рав­нять­ся 60. Затем пусть Костя раз­де­лит кучку из 4 кам­ней на две кучи по два камня. Те­перь в каж­дой куче не боль­ше трех кам­ней, по­это­му в любых 19 кучах не более 57 кам­ней.

Ответ: а) да; б) да; в) да, мог.

**C 0 № 506025.** Рас­смат­ри­ва­ет­ся набор гирь, каж­дая из ко­то­рых весит целое число грам­мов, а общий вес всех гирь равен 500 грам­мов. Такой набор на­зы­ва­ет­ся пра­виль­ным, если любое тело, име­ю­щее вес, вы­ра­жен­ный целым чис­лом грам­мов от 1 до 500, может быть урав­но­ве­ше­но не­ко­то­рым ко­ли­че­ством гирь на­бо­ра, и при­том един­ствен­ным об­ра­зом (тело кла­дет­ся на одну чашу весов, гири – на дру­гую; два спо­со­ба урав­но­ве­ши­ва­ния, раз­ли­ча­ю­щи­е­ся лишь за­ме­ной не­ко­то­рых гирь на дру­гие того же веса, счи­та­ют­ся оди­на­ко­вы­ми).

а) При­ве­ди­те при­мер пра­виль­но­го на­бо­ра, в ко­то­ром не все гири по од­но­му грам­му.

б) Сколь­ко су­ще­ству­ет раз­лич­ных пра­виль­ных на­бо­ров?

(Два на­бо­ра раз­лич­ны, если не­ко­то­рая гиря участ­ву­ет в этих на­бо­рах не оди­на­ко­вое число раз.)

**Ре­ше­ние.**

Пусть наи­боль­ший вес гири в не­ко­то­ром пра­виль­ном на­бо­ре равен http://reshuege.ru/formula/fa/fab9008ec85fe816503590b7f640c41b.png пусть общий вес всех осталь­ных гирь равенhttp://reshuege.ru/formula/19/1956940fd568edcef6c60b3723bb951b.png Ясно, что любой вес, мень­ший http://reshuege.ru/formula/69/69691c7bdcc3ce6d5d8a1361f22d04ac.png можно урав­но­ве­сить мень­ши­ми ги­ря­ми, зна­чит http://reshuege.ru/formula/a0/a059405ef8c177ffc7902f9162f99860.png Пусть http://reshuege.ru/formula/d2/d2d2b1fd841a8b6c6894b6045b4a0eef.png тогда у нас есть ми­ни­мум два спо­со­ба урав­но­ве­сить вес http://reshuege.ru/formula/01/01af960a3e0081d403786e25f05ab6a7.png где http://reshuege.ru/formula/4b/4b43b0aee35624cd95b910189b3dc231.png — это оста­ток от де­ле­ния http://reshuege.ru/formula/6f/6f8f57715090da2632453988d9a1501b.png на http://reshuege.ru/formula/0a/0ae1285ce5610001567ddb53236e50fe.png Зна­чит, http://reshuege.ru/formula/e5/e51469f0353f5d65506ab7d93bf869ab.png

Пусть гирь мак­си­маль­но­го веса http://reshuege.ru/formula/8c/8ce4b16b22b58894aa86c421e8759df3.png штук, тогда общий вес всех гирь http://reshuege.ru/formula/56/56b9d4ec68bfee840bbe5d986339138e.png зна­чит 501 де­лит­ся на http://reshuege.ru/formula/0a/0ae1285ce5610001567ddb53236e50fe.pngНайдя http://reshuege.ru/formula/fa/fab9008ec85fe816503590b7f640c41b.png можно опре­де­лить вес вто­рой по тя­же­сти гири. Ана­ло­гич­ны­ми рас­суж­де­ни­я­ми по­лу­ча­ем, что она долж­на быть де­ли­те­лем http://reshuege.ru/formula/0a/0ae1285ce5610001567ddb53236e50fe.png Раз­ло­жим 501 на про­стые мно­жи­те­ли: http://reshuege.ru/formula/70/701864e692fbc2324547b3b7a2ba8064.png Зна­чит, су­ще­ству­ет всего два на­бо­ра, кроме со­сто­я­ще­го из одних од­но­грам­мо­вых гирек. Пер­вый набор со­сто­ит из двух гирь весом 167 и 166 гирь весом по 1. Вто­рой набор со­сто­ит из 166 гирь весом 3 и двух гирь весом 1. Эти на­бо­ры дают ответ на пункт а).

Ответ на пункт б): три на­бо­ра.

**C 0 № 506031.** а) В клас­се была дана кон­троль­ная. Из­вест­но, что по край­ней мере две трети задач этой кон­троль­ной ока­за­лись труд­ны­ми: каж­дую такую за­да­чу не ре­ши­ли по край­ней мере две трети школь­ни­ков. Из­вест­но также, что по край­ней мере две трети школь­ни­ков клас­са на­пи­са­ли кон­троль­ную хо­ро­шо: каж­дый такой школь­ник решил по край­ней мере две трети задач кон­троль­ной. Могло ли такое быть?

б) Из­ме­нит­ся ли ответ в этой за­да­че, если за­ме­нить везде в ее усло­вии две трети на три чет­вер­ти?

в) Из­ме­нит­ся ли ответ в этой за­да­че, если за­ме­нить везде в ее усло­вии две трети на семь де­вя­тых?

**Ре­ше­ние.**

а) Пусть ровно треть задач лег­кие, а осталь­ные — труд­ные. Пусть треть школь­ни­ков решит все лег­кие за­да­чи и ровно по­ло­ви­ну труд­ных, а дру­гая треть школь­ни­ков решит все лег­кие за­да­чи и дру­гую по­ло­ви­ну труд­ных. По­след­няя треть школь­ни­ков пусть не решит ни­че­го. Тогда все усло­вия вы­пол­не­ны.

б) Пусть труд­ных задач всего *Т*, а лег­ких задач — *Л*. Пусть школь­ни­ков всего *Ш*, и общее ко­ли­че­ство всех ре­шен­ных задач равно *Р*. Тогда по­лу­ча­ют­ся сле­ду­ю­щие не­ра­вен­ства:

0,7(*Т* + *Л*) · 0,7*Ш* ≤  *Р*

Р ≤  *Л* · 0,7*Ш* + 0,3*Ш* · 0,7(*Т* + *Л*)

От­сю­да сле­ду­ет не­ра­вен­ство: 0,7(Т + *Л*) · 0,7*Ш* ≤  *Л* · 0,7*Ш* + 0,3*Ш* · 0,7(*Т* + *Л*).

По­де­лим все на 0,7*Ш* и пре­об­ра­зу­ем не­ра­вен­ство:

0,7*Т* + 0,7*Л* ≤ ;*Л* + 0,3*Т* + 0,3*Л*;

Т ≤  1,5*Л*.

А по усло­вию долж­но вы­пол­нять­ся не­ра­вен­ство *Т* ≥ 7/3*Л*. Про­ти­во­ре­чие.

в) Пусть обо­зна­че­ния такие же, как в пунк­те б), тогда ана­ло­гич­но по­лу­ча­ем не­ра­вен­ства:

0,75(*Т* + *Л*) · 0,75*Ш* ≤  *Р*;

*Р* ≤ ;*Л* · 0,75*Ш* + 0,25*Ш* · 0,75(Т + *Л*).

После ана­ло­гич­ных пре­об­ра­зо­ва­ний по­лу­ча­ем, что с одной сто­ро­ны *Т* ≤ *Л*, а с дру­гой, по усло­вию *Т* ≥ 3*Л*. Про­ти­во­ре­чие.

Ответ: а) да; б) нет; в) нет.

**C 0 № 506037.** Бан­ко­мат об­ме­ни­ва­ет мо­не­ты: дуб­ло­ны на пи­сто­ли и на­о­бо­рот. Пи­столь стоит *s* дуб­ло­нов, а дуб­лон — 1/*s* пи­сто­лей, где *s* — не обя­за­тель­но целое. В бан­ко­мат можно вбро­сить любое число монет од­но­го вида, после чего он вы­да­ет в обмен мо­не­ты дру­го­го вида, округ­ляя ре­зуль­тат до бли­жай­ше­го це­ло­го числа (если бли­жай­ших чисел два, вы­би­ра­ет­ся боль­шее).

а) Может ли так быть, что об­ме­няв сколь­ко-то дуб­ло­нов на пи­сто­ли, а затем об­ме­няв по­лу­чен­ные пи­сто­ли на дуб­ло­ны, мы по­лу­чим боль­ше дуб­ло­нов, чем было в на­ча­ле?

б) Если да, то может ли слу­чит­ся, что по­лу­чен­ное число дуб­ло­нов еще уве­ли­чит­ся, если про­де­лать с ними такую же опе­ра­цию?

**Ре­ше­ние.**

а) Пусть, на­при­мер, http://reshuege.ru/formula/79/794e28e459ae0f368eb6b1e36e902614.png Тогда, об­ме­няв 5 дуб­ло­нов, по­лу­чим 2 пи­сто­ля, а об­ме­няв пи­сто­ли, по­лу­чим 6 дуб­ло­нов.

б) Пусть http://reshuege.ru/formula/68/68d2be6274bc59d40853196baf1bc70f.png Об­ме­няв n дуб­ло­нов, мы по­лу­чим http://reshuege.ru/formula/e4/e46adfd939bdc430145857d65b59741e.png пи­сто­лей, где http://reshuege.ru/formula/14/14383addf92b6661fa6a85de667d70a3.png

Это равно http://reshuege.ru/formula/b7/b7ac52a455c5b0ac02170dc8baf5fd5e.png дуб­ло­нов, по­это­му ко­ли­че­ство дуб­ло­нов не могло уве­ли­чить­ся.

Пусть те­перь http://reshuege.ru/formula/b2/b24047ee29be6d59ad07c9d5a152757a.png и после пер­во­го об­ме­на мы по­лу­чим http://reshuege.ru/formula/7b/7b8b965ad4bca0e41ab51de7b31363a1.png пи­сто­лей. Тогда, как по­ка­за­но выше, за два об­ме­на мы по­лу­чим не более http://reshuege.ru/formula/7b/7b8b965ad4bca0e41ab51de7b31363a1.png пи­сто­лей, зна­чит и ко­ли­че­ство дуб­ло­нов после чет­вер­то­го об­ме­на не боль­ше, чем после вто­ро­го.

Ответ: а) Может; б) Не может.

**C 0 № 506043.** Гео­ло­ги взяли в экс­пе­ди­цию 80 банок кон­сер­вов, веса ко­то­рых все из­вест­ны и раз­лич­ны (име­ет­ся спи­сок). Через не­ко­то­рое время над­пи­си на бан­ках стали не­чи­та­е­мы­ми, и толь­ко зав­хоз знает где что. Он может все это до­ка­зать (т. е. обос­но­вать, что в какой банке на­хо­дит­ся), не вскры­вая кон­сер­вов и поль­зу­ясь толь­ко со­хра­нив­шим­ся спис­ком и двух­ча­шеч­ны­ми ве­са­ми со стрел­кой, по­ка­зы­ва­ю­щей раз­ни­цу весов на чаш­ках. До­ка­жи­те, что ему для этой цели

а) до­ста­точ­но че­ты­рех взве­ши­ва­ний;

б) не­до­ста­точ­но трех взве­ши­ва­ний.

Ком­мен­та­рий. От­ме­тим еще раз, что зав­хоз дол­жен обос­но­вать, что в какой банке на­хо­дит­ся для всех 80 банок.

**Ре­ше­ние.**

а) Для про­сто­ты рас­суж­де­ний до­ба­вим мыс­лен­но одну банку мас­сой ноль. Пер­вое взве­ши­ва­ние зав­хоз ор­га­ни­зу­ет так: на одну чашку кла­дет 27 самых тя­же­лых банок, а на дру­гую — 27 самых лег­ких. По­лу­ча­ет­ся мак­си­маль­но воз­мож­ная раз­ность. Осталь­ные участ­ни­ки экс­пе­ди­ции долж­ны при­знать, что раз­би­е­ние на три груп­пы про­из­ве­де­но пра­виль­но: (27 тя­же­лых, 27 сред­них, 27 лег­ких). Зав­хоз по­ме­ча­ет банки бук­ва­ми «т», «с», «л». Вто­рое и сле­ду­ю­щие взве­ши­ва­ния ор­га­ни­зу­ют­ся ана­ло­гич­но. Пусть банки после k-го взве­ши­ва­ния раз­би­ты на 3*k* групп по 34 −*k* банок, по­ме­чен­ных не­ко­то­рым *k*-бук­вен­ным сло­вом из букв т, с, л. Из каж­дой груп­пы бе­рет­ся треть самых тя­же­лых и треть самых лег­ких; тя­же­лые кла­дут­ся на одну чашу весов, а лег­кие — на дру­гую. В итоге, каж­дая треть каж­дой груп­пы опре­де­ля­ет­ся од­но­знач­но и об­ра­зу­ет груп­пу сле­ду­ю­ще­го ранга, а банки по­ме­ча­ют­ся еще одной бук­вой «т», «с», или «л». После 4-го взве­ши­ва­ния груп­пы будут со­сто­ять из одной банки, при этом все банки по­ме­ча­ют­ся сло­вом из 4-х букв. Такое слово од­но­знач­но ука­зы­ва­ет банку, и за­да­ча ре­ше­на.

б) Пусть про­ве­де­но три взве­ши­ва­ния. Каж­дая банка при пер­вом взве­ши­ва­нии либо ока­за­лась на той чашке весов, ко­то­рая пе­ре­ве­си­ла, либо на дру­гой, либо во­об­ще не взве­ши­ва­лась. В за­ви­си­мо­сти от этого по­ме­тим каж­дую банку бук­вой «т», «л» или «с» (это зна­чит, что банка не взве­ши­ва­лась). Ана­ло­гич­ным об­ра­зом ста­вим букву при вто­ром и тре­тьем взве­ши­ва­нии. Слов из трех букв всего 27, а банок 80, зна­чит най­дут­ся по мень­шей мере две банки с оди­на­ко­вой под­пи­сью. Зна­чит, мы не можем их раз­ли­чить, по­это­му трех взве­ши­ва­ний не­до­ста­точ­но.

**C 0 № 506049.** Среди любых де­ся­ти из ше­сти­де­ся­ти школь­ни­ков най­дет­ся три од­но­класс­ни­ка. Обя­за­тель­но ли среди всех ше­сти­де­ся­ти школь­ни­ков най­дет­ся

а) 15 од­но­класс­ни­ков;

б) 16 од­но­класс­ни­ков?

**Ре­ше­ние.**

а) Разо­бьем всех школь­ни­ков на клас­сы. Пусть в каж­дом клас­се не более 14 че­ло­век. Пусть *k* – число клас­сов, со­сто­я­щих хотя бы из двух школь­ни­ков (такие клас­сы на­зо­вем боль­ши­ми). Тогда из усло­вия ясно, что k\le 4 (иначе, взяв по два школь­ни­ка из пяти боль­ших клас­сов, мы по­лу­чим 10 че­ло­век, среди ко­то­рых нет трех од­но­класс­ни­ков).

Пусть *k* = 4. Тогда общее число школь­ни­ков в боль­ших клас­сах не пре­вос­хо­дит 56. Зна­чит най­дут­ся 4 школь­ни­ка, каж­дый из ко­то­рых не имеет од­но­класс­ни­ков. Возь­мем их и еще по два школь­ни­ка из трех боль­ших клас­сов. У нас по­лу­чи­лось 10 школь­ни­ков, среди ко­то­рых нет трех од­но­класс­ни­ков.

Пусть те­перь *k* мень­ше че­ты­рех. Тогда (ана­ло­гич­но) най­дут­ся как ми­ни­мум 18 школь­ни­ков, каж­дый из ко­то­рых не имеет од­но­класс­ни­ков. Это, ко­неч­но, про­ти­во­ре­чит усло­вию.

Таким об­ра­зом, хотя бы в одном клас­се не менее 15 школь­ни­ков.

б) Не­обя­за­тель­но. Рас­смот­рим 4 клас­са по 15 школь­ни­ков. Тогда среди любых де­ся­ти най­дут­ся три од­но­класс­ни­ка, но 16 од­но­класс­ни­ков не най­дет­ся.

Ответ: а) Обя­за­тель­но; б) Нет.

**C 0 № 506067.** На шести елках сидят шесть сорок — по одной на каж­дой елке. Елки рас­тут с ин­тер­ва­лом в 10 м. Если какая-то со­ро­ка пе­ре­ле­та­ет с одной елки на дру­гую, то какая-ни­будь, дру­гая со­ро­ка обя­за­тель­но пе­ре­ле­та­ет на столь­ко же мет­ров, но в об­рат­ном на­прав­ле­нии.

а) Могут ли все со­ро­ки со­брать­ся на одной елке?

б) А если сорок и елок семь?

в) А если елки стоят по кругу?

**Ре­ше­ние.**

а) По­счи­та­ем сум­мар­ное рас­сто­я­ние от всех сорок до самой левой елки. Оче­вид­но, оно равно 10 + 20 + 30 + 40 + 50 = 150 м и не ме­ня­ет­ся после каж­до­го пе­ре­ме­ще­ния сорок.

Если все со­ро­ки ока­жут­ся на одной елке, то рас­сто­я­ние от этой елки до самой левой равно 150:6 = 25 м, но ясно, что на этом рас­сто­я­нии ни­ка­кой елки не рас­тет.

б) За­ну­ме­ру­ем елки по­сле­до­ва­тель­но. Тогда пусть со­ро­ки с 1-ой и 7-ой елок летят на 4-ую. Ана­ло­гич­но, со­ро­ки со 2-й и 6-й елок летят на 4-ую. Ана­ло­гич­но, со­ро­ки с 3-й и 5-й елок летят на 4-ую. Таким об­ра­зом, все со­ро­ки со­бра­лись на чет­вер­той елке.

в) За­ну­ме­ру­ем елки по кругу (от 1 до 6). По­ста­вим в со­от­вет­ствие каж­дой со­ро­ке номер елки, на ко­то­рой она сидит. Ясно, что после каж­до­го пе­ре­ле­та сорок чет­ность суммы но­ме­ров елок, на ко­то­рых они сидят, не ме­ня­ет­ся. А из­на­чаль­но это сумма равна 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21. Зна­чит, она оста­нет­ся не­чет­ной. Если же все со­ро­ки со­бе­рут­ся на одной елке, то сумма их но­ме­ров долж­на де­лить­ся на 6, то есть быть чет­ной. Про­ти­во­ре­чие.

Ответ: а) Нет; б) Да; в) Нет.

**C 0 № 506073.** Име­ют­ся ка­мен­ные глыбы: 50 штук по 800 кг, 60 штук по 1000 кг и 60 штук по 1500 кг (рас­ка­лы­вать глыбы нель­зя).

а) Можно ли увез­ти все эти глыбы од­но­вре­мен­но на 60 гру­зо­ви­ках, гру­зо­подъ­ем­но­стью 5 тонн каж­дый, пред­по­ла­гая, что в гру­зо­вик вы­бран­ные глыбы по­ме­стят­ся?

б) Можно ли увез­ти все эти глыбы од­но­вре­мен­но на 38 гру­зо­ви­ках, гру­зо­подъ­ем­но­стью 5 тонн каж­дый, пред­по­ла­гая, что в гру­зо­вик вы­бран­ные глыбы по­ме­стят­ся?

в) Какое наи­мень­шее ко­ли­че­ство гру­зо­ви­ков, гру­зо­подъ­ем­но­стью 5 тонн каж­дый, по­на­до­бит­ся, чтобы вы­вез­ти все эти глыбы од­но­вре­мен­но, пред­по­ла­гая, что в гру­зо­вик вы­бран­ные глыбы по­ме­стят­ся?

**Ре­ше­ние.**

а) Масса любых трех таких глыб не пре­вос­хо­дит 5 тонн. Зна­чит в 60 гру­зо­ви­ках можно увез­ти 180 таких глыб. Зна­чит, увез­ти 170 глыб тем более по­лу­чит­ся.

б) Сум­мар­ная масса таких глыб равна http://reshuege.ru/formula/c4/c42ecdeee239ad150a2c2357775ae334.png кг. Гру­зо­подъ­ем­ность 38 гру­зо­ви­ков ровно такая же. Зна­чит, если можно увез­ти эти глыбы, то каж­дый гру­зо­вик дол­жен быть за­гру­жен «под за­вяз­ку». Если в каком-ни­будь гру­зо­ви­ке есть глыба весом 800 кг, то един­ствен­ная воз­мож­ность пол­но­стью его за­пол­нить – это до­ба­вить туда еще че­ты­ре таких глыбы и глыбу мас­сой 1000 кг. Таким об­ра­зом, гру­зо­ви­ков, за­гру­жен­ных так, по­на­до­бит­ся 10 штук. По­сколь­ку оста­лось 60 глыб, мас­сой 1500 кг каж­дая и 28 гру­зо­ви­ков, то в каком-то гру­зо­ви­ке ми­ни­мум три таких глыбы. Но такой гру­зо­вик уже не будет набит «под за­вяз­ку». Про­ти­во­ре­чие.

в) 38 гру­зо­ви­ков не хва­тит, как по­ка­за­но в пунк­те б). По­ка­жем, что 39 гру­зо­ви­ков хва­тит:

В 10 гру­зо­ви­ков за­гру­жа­ем по пять 800-ки­ло­грам­мо­вых глыб и одной 1000-ки­ло­грам­мо­вой.

В 25 гру­зо­ви­ков за­гру­жа­ем по две 1500-ки­ло­грам­мо­вых глыб и по две 1000-ки­ло­грам­мо­вых. В 3 гру­зо­ви­ка гру­зим по три 1500 ки­ло­грам­мо­вых глыбы. В остав­ший­ся гру­зо­вик гру­зим по­след­нюю 1500-ки­ло­грам­мо­вую глыбу.

Ответ: а) Да; а) Нет; а) Да.